Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ) (МАИ)

# Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»

# Кафедра 802

КУРСОВАЯ РАБОТА

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

НА ТЕМУ

“ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ого ПОРЯДКА

И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ”

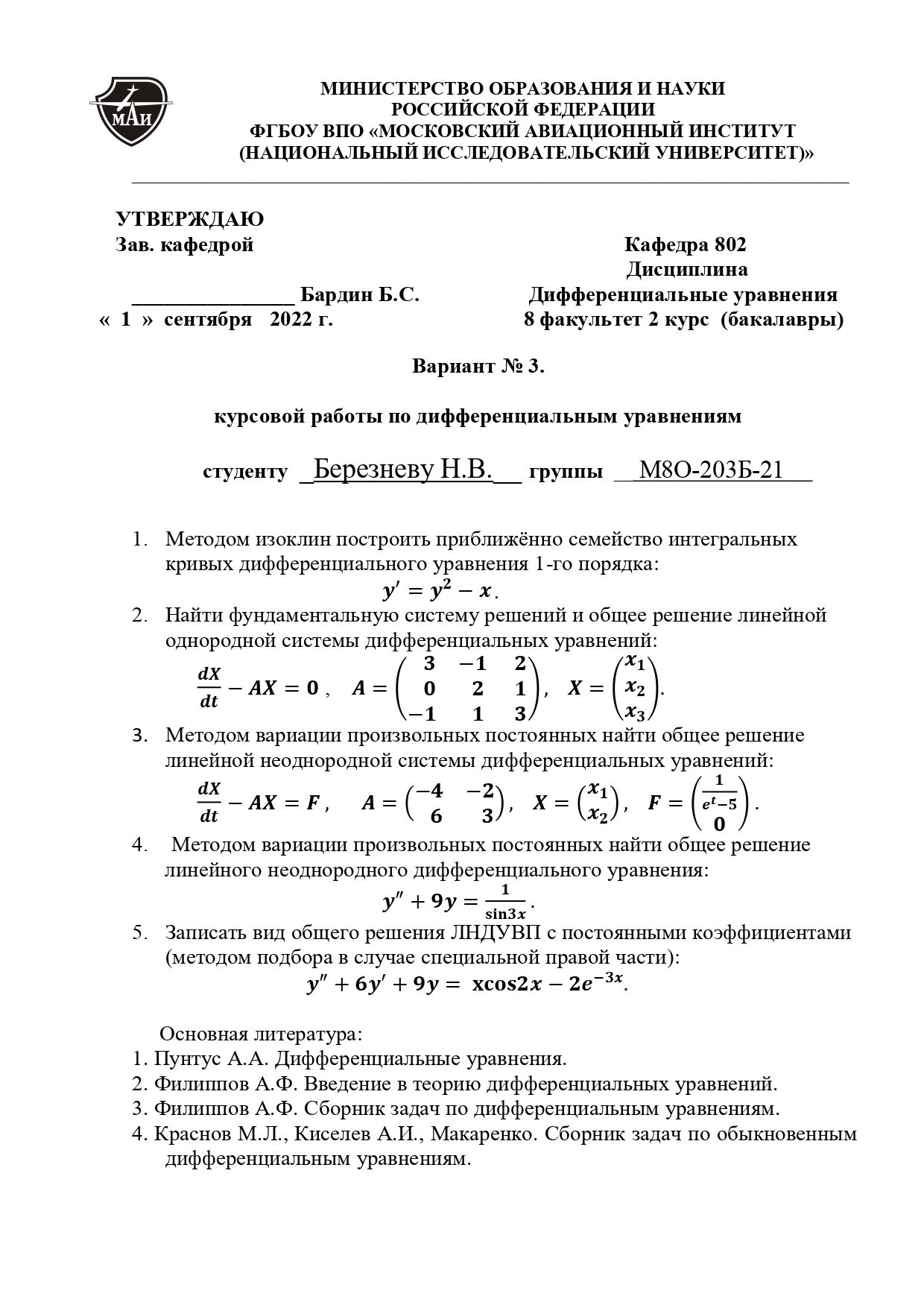
# 3-й семестр

**Выполнил:** студент группы М8О-203Б-21

Березнев Н.В.

**Проверил(-а):** Будкина Е.М.

Москва 2022



№ 1 Методом изоклин построить приближённо семейство интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка.

1.1. Решение уравнения , проходящее через точ­ку (x, у) должно иметь в этой точке производную , равную , т. е. оно должно касаться прямой, наклоненной под углом = к оси Ох. Геометрическое место точек плоскости (x, у), в которых наклон касательных к решениям уравнения один и тот же, называется изоклиной. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид , где k — постоянная.

Чтобы приближенно построить решения уравнения , можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, т. е. кривые, которые в точках пересечения с изоклинами имеют касательные

с угловыми коэффициентами соответственно

1.2. Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства

(1)

надо продифференцировать равенство (1) n раз, считая у функ­цией от x, а затем из полученных уравнений и уравнения (1) исключить произвольные постоянные

1.3 Линии, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом , называются изогональными траек­ториями. Углы наклона траектории кривой к оси Ох связаны соотношением . Пусть

— дифференциальное уравнение данного семейства кривых, а

— уравнение семейства изогональных траекторий. Тогда Следовательно, если уравнение (6) на­писано и угол известен, то легко найти и затем написать дифференциальное уравнение траекторий (7).

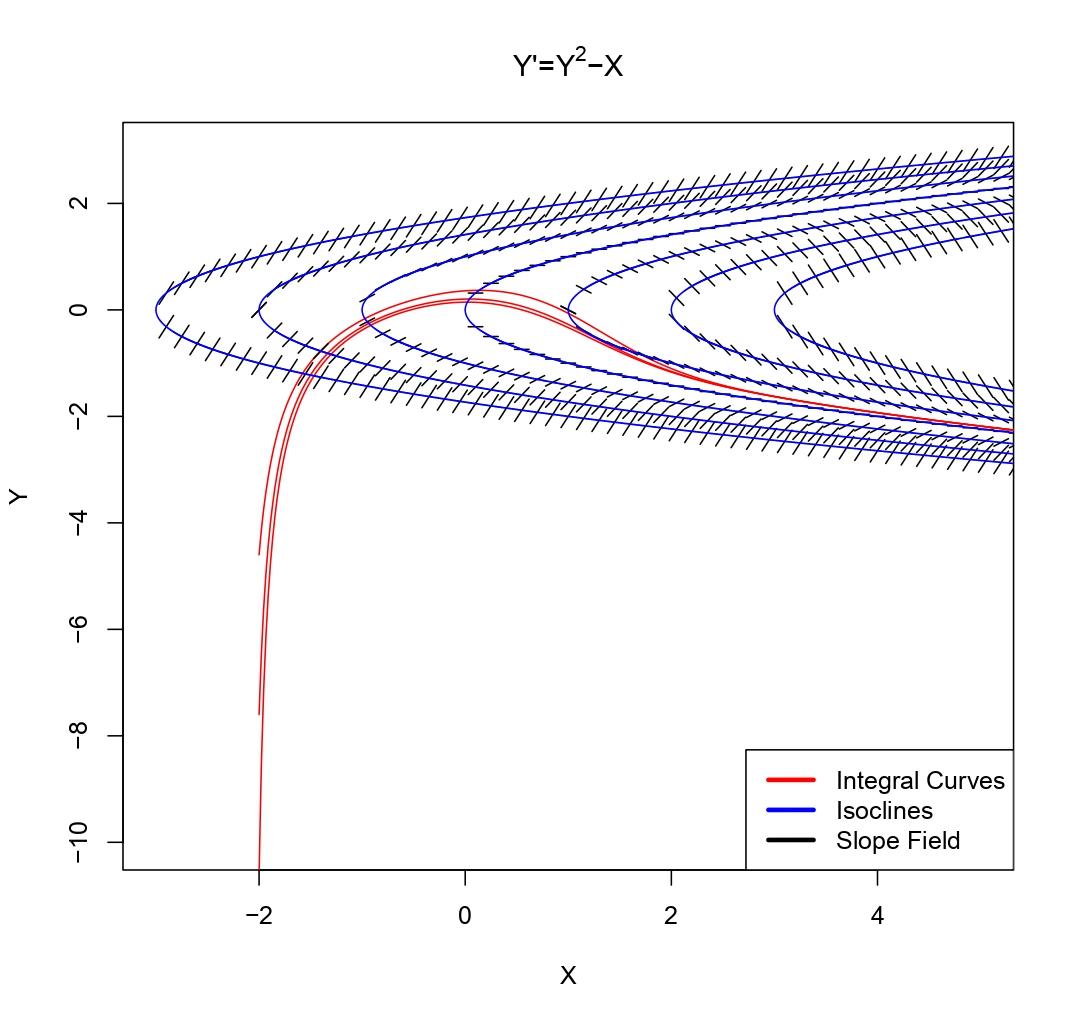
Если уравнение данного семейства кривых написано в виде

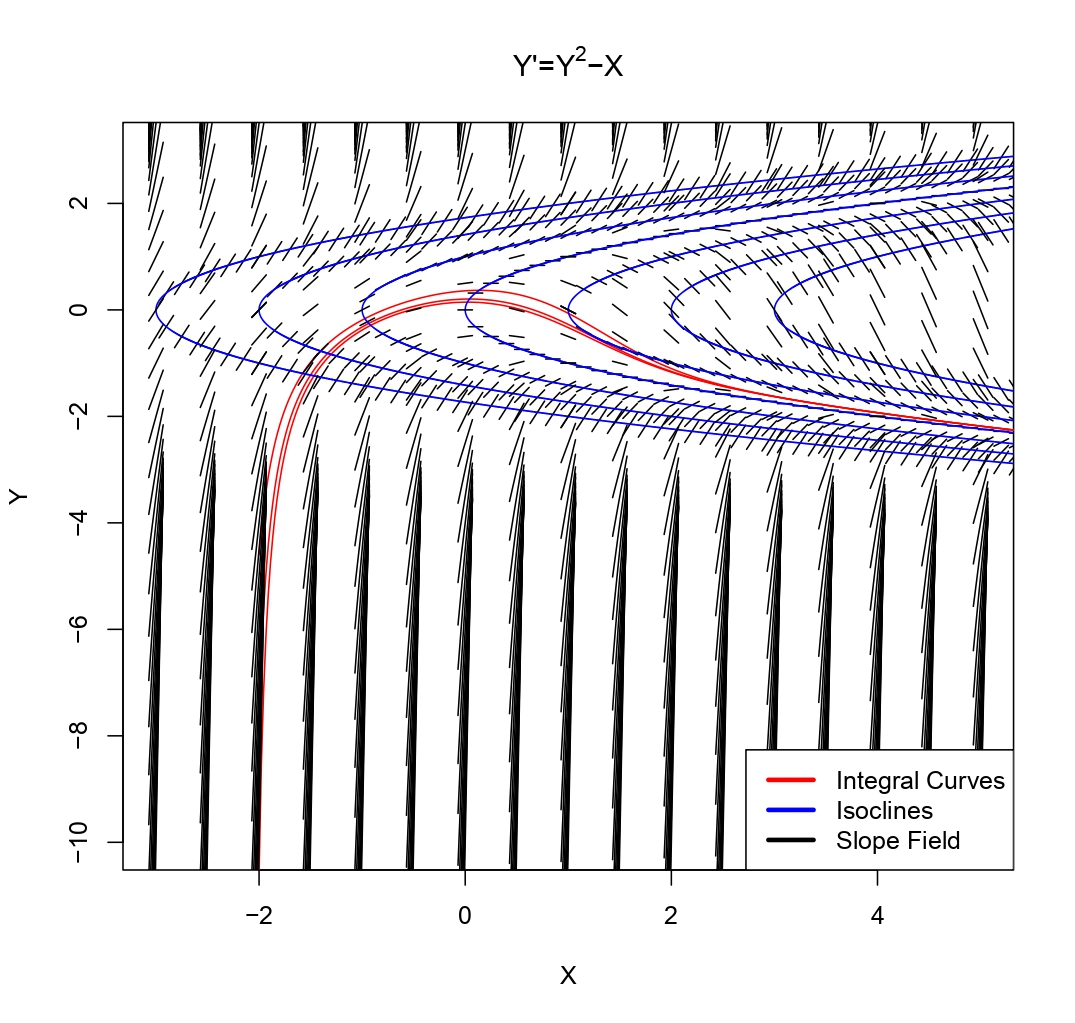
то при составлении уравнения изогональных траекторий можно обойтись без разрешения уравнения (8) относительно. В этом случае в (8) надо заменить на , где — угловой коэффициент касательной к траектории.

Если же уравнение семейства кривых дано в виде , то сначала нужно составить дифференциальное уравне­ние этого семейства и только после этого — дифференциальное уравнение траекторий.

Решение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | y |
| 1 | 0 | 0 |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  | 1 |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |





№ 2 Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений.

Для решения системы (где означает )

(1)

или, в векторной записи, , где x — вектор, A — матрица:

надо найти корни характеристического уравнения

Каждому простому корню характеристического уравне­ния соответствует решение , где — произвольная постоянная, — собственный вектор матрицы А, соответству­ющий этому .

Если для кратного корня имеется столько линейно незави­симых собственных векторов , какова его кратность, то ему соответствует решение .

Если для корня кратности k имеется только m линей­но независимых собственных векторов, и m < k, то решение, соответствующее этому , можно искать в виде произведения многочлена степени k-m на , т. е. в виде\*)

(3)

Чтобы найти коэффициенты a, b, … , s, надо подставить ре­шение (3) в систему (1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a, b, … , s.

Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты a, b, …, s должны зависеть от k произвольных постоянных, где k — кратность корня .

Найдя для каждого решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1).

Решение:

Ответ:

№3 Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:

Решение неоднородной системы

можно найти методом вариации постоянных, если известно об­щее решение однородной системы с теми же коэффициентами . Для этого в формуле общего решения однородной систе­мы надо заменить произвольные постоянные на неизвестные функции . Полученные выражения для надо подставить

в данную неоднородную систему, и из этой системы найти .

Решение:

:

2)

*=*

*=*

**Ответ:**

№4 Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

Линейное неоднородное уравнение

с любой правой частью решается методом вариации по­стоянных. Пусть найдено общее решение линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогдарешение уравнения (11) ищется в виде

Функции определяются из системы

…

Решение:

:

2)

**Ответ:**

№5 Записать вид общего решения ЛНДУВП с постоянными коэффициентами (методом подбора в случае специальной правой части):

Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и про­изведений функций частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью , частное решение имеет вид

где — многочлен той же степени га. Число s = 0, если — не корень характеристического уравнения (2), а если — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти ко­эффициенты многочлена , надо решение (4) подставить

в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят синус и косинус, то их можно выразить через показательную функцию по форму­лам Эйлера

и свести задачу к уже рассмотренному случаю.

Если же коэффициенты левой части уравнения веществен­ны, то можно обойтись без перехода к комплексным функци­ям (5). Для уравнения с правой частью

можно искать частное решение в виде

где s = 0, если не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня в противном случае, a и — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов Р и Q. Чтобы найти коэффициенты мно­гочленов и , надо подставить решение (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Еще один метод отыскания частного решения уравнения с вещественными коэффициентами и правой частью вида (6) со­стоит в следующем. Сначала решают уравнение с правой ча­стью . Вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью , а мнимая —

решением уравнения с правой частью .

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функ­ций вида и вида (6), то частное решение отыскивается по следующему правилу.

Частное решение линейного уравнения с правой частью равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями .

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и об­щего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Решение:

:

:

*in𝑠 днородного уравненияи)Жьной правой частиее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений*

Ответ: